



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по теории вероятностей и математической статистике в Математическом институте АН СССР,
Теория вероятн. и ее примен., 1975, том 20, выпуск 3, 692–700

<https://www.mathnet.ru/tvp3334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.252.119.48

28 июня 2025 г., 15:42:44



**РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР**

1974—1975

Заседание 5 ноября

Леонов Ю. П., Об одном классе конечных распределений.

Заседание 17 декабря

Анисимов В. В.; Предельные теоремы для случайных процессов и их применения к дискретным схемам суммирования.

Общие предельные теоремы и различные типы сходимости случайных процессов были изучены в работах Ю. В. Прохорова, А. В. Скорохода, А. А. Боровкова. Многие авторы рассматривали условия сходимости для конкретных классов процессов. Вместе с тем в последнее время в ряде задач возникает новый класс случайных процессов, предельные теоремы для которого не изучались, а общие условия сходимости работают не эффективно. Для таких процессов характерно наличие моментов марковского типа, в которых процесс меняет свои свойства, как бы «переключается». Интересно то, что подобные процессы естественно возникают в качестве предельных для ступенчатых процессов сумм случайных величин, заданных на случайном процессе с дискретным расщепляющимся фазовым пространством.

«Переключающиеся» процессы конструктивно удобно задавать следующим образом. Пусть D_∞^m — пространство функций на $[0, \infty)$ со значениями в R^m без разрывов 2-го рода и непрерывных справа, $\mathfrak{A}$ — минимальная σ -алгебра цилиндрических множеств в D_∞^m , $\mathfrak{B}$ — σ -алгебра борелевских множеств в R^m . На $(D_\infty^m, \mathfrak{A})$ заданы параметрическое семейство мер $\mathcal{F} = \{P_k^{(a)}(A), A \in \mathfrak{A}, a \in R^m, k = \overline{1, r}\}$ ($r \leq \infty$) и семейство $\mathfrak{A}$ -измеримых функционалов $\tau = \{\tau(k, z(\cdot)), z(\cdot) \in D_\infty^m, k = \overline{1, r}\}$. При этом предполагается, что для любых $l = 1, 2, \dots, t_1 < \dots < t_l, k = \overline{1, r}$ и любой непрерывной функции φ функция

$$\varphi_k(t_1, \dots, t_l, a) = \int_{(R^m)^l} \varphi(u_1, \dots, u_l) P_k^{(a)}(z(t_i) \in du_i, i = \overline{1, l})$$

$\mathfrak{B}$ -измерима по переменной a , а $\tau(k, z(\cdot))$ — марковский момент для функции $z(t)$. Пусть также $\mathcal{P} = \{p(k, j, a), k, j = \overline{1, r}, a \in R^m\}$ — семейство $\mathfrak{B}$ -измеримых функций таких, что $p(k, j, a) \geq 0$ и $\sum_{j=1}^r p(k, j, a) = 1$ для любых $k = \overline{1, r}, a \in R^m$, а $\bar{p} = \{p(k,$

$k = \overline{1, r}\}$ — собственное распределение вероятностей. Тогда по семействам $\mathcal{F}$, τ , $\mathcal{P}$, $\bar{p}$ в пространстве $D_\infty \times D_\infty^m$ можно построить случайный процесс $\{\kappa(t), \xi(t), t \geq 0$, со значениями в $\{1, \dots, r\} \times R^m$, эволюция которого протекает следующим образом.

Пусть $\tilde{\mathcal{F}} = \{\xi^{(l)}(t, k, a), t \geq 0, k = \overline{1, r}, a \in R^m, l \geq 0\}$ — семейство случайных процессов, распределения которых не зависят от индекса l , и таких, что $P\{\xi^{(l)}(\cdot, k, a) \in A\} = P_k^{(a)}(A), A \in \mathfrak{A}$. Тогда $P\{\kappa(0) = k\} = p(k, k = \overline{1, r}$. При этом если $\kappa(0) = k$ и $\tau(k, \xi^{(1)}(\cdot, k, 0)) = \tau_1$, то $\kappa(u) = k, \xi(u) = \xi^{(1)}(u, k, 0), 0 \leq u < \tau_1$. Далее, если $\xi^{(1)}(\tau_1, k, 0) = a_1$, то $P\{\kappa(\tau_1) = j\} = p(k, j, a_1)$, а $\tau_2 = \tau_1 + \tau(j, \xi^{(2)}(\cdot, j, a_1))$, если $\kappa(\tau_1) = j$, и при этом $\kappa(u) = j, \xi(u) = a_1 + \xi^{(2)}(u - \tau_1, j, a_1), \tau_1 \leq u < \tau_2$. Если затем $\xi^{(2)}(\tau_2 - \tau_1, j, a_1) = a_2$, то $P\{\kappa(\tau_2) = i\} = p(j, i, a_2)$ и т. д. Построенный процесс назовем «переключающимся» процессом. Отметим, что полученный класс процессов обобщает такие модели, как марковские процессы, однородные по 2-й компоненте [1], процессы с независимыми приращениями, управляемые полумарковским процессом [2], и кусочно-линейные и марковские агрегаты [3].

Для переключающихся процессов доказаны общие предельные теоремы в следующей постановке. Пусть есть последовательность семейств $\tilde{\mathcal{F}}_n, \tau_n, \mathcal{P}_n, p_n$, которые при каждом $n \geq 1$ задают переключающийся процесс $\{\kappa_n(t), \xi_n(t)\}, t \geq 0$, а $\{\kappa_0(t), \xi_0(t)\}, t \geq 0$, — процесс, который задается семействами $\tilde{\mathcal{F}}_0, \tau_0, \mathcal{P}_0, p_0$. Указано, в каком смысле следует потребовать сходимость характеристик семейств $\tilde{\mathcal{F}}_n, \tau_n, \mathcal{P}_n, p_n$ к соответствующим характеристикам семейств $\tilde{\mathcal{F}}_0, \tau_0, \mathcal{P}_0, p_0$ при $n \rightarrow \infty$ с тем, чтобы имела место слабая сходимость конечномерных распределений или функционалов, непрерывных в одной из известных топологий, процесса $\{\kappa_n(t), \xi_n(t)\}$ к $\{\kappa_0(t), \xi_0(t)\}$. Рассмотрены также приложения полученных результатов к дискретным схемам суммирования.

В качестве примера рассмотрим следующую схему. Пусть для каждого $n \geq 1$ заданы: семейство независимых в совокупности случайных процессов $\kappa_n = \{\kappa_n^{(k)}(l), k = \overline{1, r}\}$ ($r < \infty$), где $\kappa_n^{(k)}(l) = \{\kappa_n^{(k)}(l), l \geq 0\}$ — процесс с дискретным временем и множеством состояний I_k ($I_k \cap I_j = \emptyset, k \neq j$), независимое от κ_n семейство независимых в совокупности случайных векторов $\{(\xi_n^{(k)}(j, l), \chi_n^{(k)}(j, l)), j \in I_k, k = \overline{1, r}, l \geq 0\}$, распределение которых не зависит от индекса l (при этом величины $\chi_n^{(k)}(j, l)$ могут принимать лишь два значения: 0 или 1), а также семейство $\mathcal{P}_n = \{p_n^{(k)}(i, j), i \in I_k, j = \overline{1, r}, k = \overline{1, r}\}$ такое, что $p_n^{(k)}(i, j) \geq 0$ и

$$\sum_{j=1}^r p_n^{(k)}(i, j) = 1, i \in I_k, k = \overline{1, r}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} (\xi_n(k, t), \chi_n(k, t)) &= \sum_{l=0}^{[nt]} (\xi_n^{(k)}(\kappa_n^{(k)}(l), l), \chi_n^{(k)}(\kappa_n^{(k)}(l), l)), \\ \tau_n(k) &= \inf \{t : t > 0, \chi_n(k, t) \geq s_k\}, s_k > 0, k = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Построим переключающийся процесс $\{\kappa_n(t), \xi_n(t)\}, t \geq 0$, по семействам $\tilde{\mathcal{F}}_n = \{\xi_n(k, t), k = \overline{1, r}\}$, моментам переключения $\tau_n = \{\tau_n(k), k = \overline{1, r}\}$, начальному распределению $p_n = \{p_n(k), k = \overline{1, r}\}$, а вероятности переключения для $\kappa_n(t)$ определяются следующим образом: если $\kappa_n(0) = k$ и $\chi_n^{(k)}(\tau_n(k)) = i$, то $P\{\kappa_n(\tau_n(k)) = j\} = p_n^{(k)}(i, j), i \in I_k, k, j = \overline{1, r}$.

Предположим для простоты, что I_k — конечные множества, $k = \overline{1, r}$. Через $v_n^{(k)}(j, m)$ обозначим количество попаданий $\kappa_n^{(k)}$ в состояние j за m шагов, $j \in I_k$.

Теорема. Если для любого $k = \overline{1, r}$:

1) конечномерные распределения процесса $\{n^{-1}v_n^{(k)}(j, [nt]), j \in I_k\}$ слабо сходятся к распределению процесса $\{v_0^{(k)}(j, t), j \in I_k\}, t \geq 0$,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(M \exp \{i(\lambda \xi_n^{(k)}(j, 1) + v \chi_n^{(k)}(j, 1))\} - 1) = a_k(j, \lambda, v)$,

$$0 \leq |a_k(j, \lambda, v)| < \infty, t \in I_k,$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = p_0(k), \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^{(k)}(m, l) = p_0^{(k)}(m, l), m \in I_k, l = \overline{1, r}$,

то последовательность процессов $\{\kappa_n(t), \xi_n(t)\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится в J -топологии на любом промежутке $[0, T]$ к переключающемуся процессу $\{\kappa_0(t), \xi_0(t)\}$, который строится следующим образом. Положим

$$(\xi_0(k, t), \chi_0(k, t)) = \sum_{j \in I_k} (\xi_0^{(k)}(j, v_0^{(k)}(j, t)), \chi_0^{(k)}(j, v_0^{(k)}(j, t))),$$

где $(\xi_0^{(k)}(j, t), \chi_0^{(k)}(j, t)), k = \overline{1, r}$, — независимые в совокупности и от процессов $v_0^{(k)}(m, t)$ однородные двумерные процессы с независимыми приращениями и кумулянтами $a_k(j, \lambda, v)$. Пусть $\tau_0(k)$ определяется согласно (1) при $n = 0$. Тогда $\{\kappa_0(t), \xi_0(t)\}$ строится по семействам $\{\xi_0(k, t), k = \overline{1, r}\}, \tau_0 = \{\tau_0(k), k = \overline{1, r}\}, p_0 =$

$= \{p_0(k), k = \overline{1, r}\}, \{p_0^{(k)}(m, j), m \in I_k, k, j = \overline{1, r}\}$ подобно процессу $\{\kappa_n(t), \zeta_n(t)\}$, где, однако, изменения состояний $\kappa_0(t)$ происходят следующим образом: если $\kappa_0(0) = k$ и $\chi_0^{(k)}(i, v_0^{(k)}(i, \tau_0(k))) - \chi_0^{(k)}(i, v_0^{(k)}(i, \tau_0(k) - 0)) > 0$, то $P\{\kappa_0(\tau_0(k)) = j\} = p_0^{(k)}(i, j), i \in I_k, k, j = \overline{1, r}$.

Следствие. Если $v_0^{(k)}(j, t) \equiv q^{(k)}(j)t, t \geq 0$, с вероятностью 1, $j \in I_k, k = \overline{1, r}$, и $s_k \equiv 1, k = \overline{1, r}$, то $\{\kappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ — марковский процесс, однородный по 2-й компоненте [1].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. П. Ежов, А. В. Скороход, Марковские процессы, однородные по второй компоненте, I, II, Теория вероят. и ее примен., XIV, 1 (1969), 3—14; 4, 679—692.
- [2] В. В. Анисимов, Асимптотическое укрупнение состояний случайных процессов, Кибернетика, 3 (1973), 109—117.
- [3] Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко, Лекции по теории сложных систем, М., «Сов. радио», 1973.

Заседание 18 февраля

Боровских Ю. В., Аналитические методы исследования асимптотических свойств вероятностных распределений в случайных блужданиях, в теории критериев Колмогорова — Смирнова и Крамера — Мизеса — Смирнова.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих лишь целочисленные значения. Положим $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$. Считаем, что общий наибольший делитель возможных значений ξ_j равен единице, а общий наибольший делитель разностей возможных значений равен p , т. е. блуждание $\{S_n\}$ периодически с периодом p . Обозначим

$$p_k = P(\xi_1 = k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; P(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k w^k,$$

$$\bar{S}_n = -\max_{1 \leq k \leq n} S_k, \underline{S}_n = \min_{1 \leq k \leq n} S_k.$$

Будем предполагать, во-первых, что $p_k = 0$ при $k \leq -2, p_{-1} > 0$ и, во-вторых, что функция $P(w)$ аналитична в кольце $0 < |w| < H$ при некотором $H > 1$.

Введем в рассмотрение вероятность

$$U_{-x,y}^l(n) = P(\bar{S}_n < y, \underline{S}_n \leq -x, S_n = l). \quad (1)$$

Далее, пусть $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ — две серии независимых наблюдений. Обозначим $F_{n_1}(x)$ и $G_{n_2}(y)$ эмпирические функции распределений соответственно первой и второй серии. О распределении меры расхождения между $F_{n_1}(x)$ и $G_{n_2}(y)$ в критерии согласия Н. В. Смирнова известно [1], что

$$P\left(\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)| < \lambda\right) = P\left(\max_{0 \leq k \leq n_1 + n_2} |S_k| < \lambda \mid S_{n_1 + n_2} = 0, \eta_0 = 0\right), \quad (2)$$

где $S_k = \sum_{j=0}^k \eta_j, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — независимы,

$$P\left(\eta_k = \sqrt{\frac{n_1}{n_2(n_1 + n_2)}}\right) = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \quad P\left(\eta_k = -\sqrt{\frac{n_2}{n_1(n_1 + n_2)}}\right) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Предполагаем, что $n_1 = n$, $n_2 = nr$, где $r \geq 1$ — любое целое фиксированное число.

Вычисление вероятности в правой части (2) сводится к вычислению $U_{-x,y}^l(n)$.

Асимптотический анализ $U_{-x,y}^l(n)$ при $n \rightarrow \infty$ основан на исследовании аналитических свойств за пределами круга $|z| < 1$ производящей функции $U_{-x,y}^l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n U_{-x,y}^l(n)$ дробно-рационального вида

$$U_{-x,y}^l(z) = \frac{\left\{ f_{-x}(z) - f_{-x-y}(z) \frac{f_y(z)}{f_0(z)} \right\} \left\{ f_{l+x}(z) - f_{l-y}(z) \frac{f_{x+y}(z)}{f_0(z)} \right\}}{\left\{ f_0(z) - f_{-x-y}(z) \frac{f_{x+y}(z)}{f_0(z)} \right\}},$$

где $f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(S_n = m)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и применении некоторой модификации асимптотического метода Лапласа [2].

2. Изучение асимптотических свойств распределения известного критерия Крамера — Мизеса — Смирнова

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$$

основано на следующей теореме. Пусть $\varphi_n(t) = E e^{it\omega_n^2}$ — характеристическая функция ω_n^2 -критерия.

Теорема. *Имеет место формула*

$$\varphi_n(t) = E \left[\int_0^1 \exp \left\{ \sqrt{\frac{4it}{\pi^2 n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tau_j}{j} \cos j\pi x \right\} dx \right]^n, \quad (3)$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин со средним 0 и единичной дисперсией.

Формула (3) пригодна как для получения полных асимптотических разложений, так и для оценки скорости сходимости распределения ω_n^2 к своему пределу при $n \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. Боровков, К задаче о двух выборках, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 4 (1962), 605—624.
- [2] Ю. В. Боровских, Полное асимптотическое разложение для критерия согласия А. Н. Колмогорова, Записки научных семинаров ЛОМИ, 41 1974, 30—66.

Заседание 11 марта

Гусев С. И., Асимптотические разложения для некоторых статистических оценок.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — повторная выборка из распределения на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, имеющего плотность $f(x, \theta_0)$ из параметрического семейства плотностей $\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ относительно σ -конечной меры ν , где Θ — объединение конечно-го числа открытых интервалов R^1 . Задаваясь функциями $W(\cdot)$, $\pi(\cdot)$ и полагая

$$p_n(\theta | X) = \left(\prod_{j=1}^n f(x_j, \theta) \right) \pi(\theta) \left/ \int_{\Theta} \left(\prod_{j=1}^n f(x_j, u) \right) \pi(u) du \right.,$$

рассмотрим обобщенную байесовскую оценку t_n , минимизирующую $\int W(d - \theta) p_n(\theta | X) d\theta$, и оценку максимальной апостериорной плотности $\hat{\theta}_n$, максимизирующую $p_n(\theta | X)$, частным случаем которой является оценка максимального правдоподобия.

Условия регулярности:

1) $\int |f(x, \theta_2) - f(x, \theta_1)| v(dx) > 0$ для $\theta_1 \neq \theta_2$;

2) для некоторого $p_1 > 0$ и любого компакта $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_1 \in K, \theta_2 \in \Theta} |\theta_1 - \theta_2|^{p_1} \int \sqrt{f(x, \theta_1) f(x, \theta_2)} v(dx) < \infty;$$

3) для всех $\mathfrak{X} \in \mathcal{X}$, $f(x, \cdot)$ непрерывна на Θ^c (замыкание Θ в R^1), имеет $k + 2$ ($k \geq 1$) непрерывных производных на Θ .

Определим $l_i(x, \theta)$ как $\partial^i \ln f(x, \theta) / \partial \theta^i$, если $f(x, \theta) \neq 0$, 0, если $f(x, \theta) = 0$, и обозначим E_θ математическое ожидание, соответствующее $f(x, \theta)$.

4) для некоторых $\alpha > 0$, $m_0 \geq 1$ и любого компакта $K \subset \Theta$

a) $\sup_{\theta \in K} E_\theta |l_1(\cdot, \theta)|^{\max(3, k+1+\alpha, k+m_0-1)} < \infty$;

b) $\sup_{\theta \in K} E_\theta |l_i(\cdot, \theta)|^{\max(k+1, k+m_0-1)} < \infty$, $i = 2, \dots, k+1$;

c) $\sup_{\theta_1 \in K, \{\theta_1 - \theta_2\} \leq \varepsilon_1(K)} E_{\theta_1} |l_{k+2}(\cdot, \theta_2)|^{(k+1)/2} < \infty$ для некоторого $\varepsilon_1(K) > 0$;

5) $I(\theta) = E_\theta |l_1(\cdot, \theta)|^2 > 0$ для любого $\theta \in \Theta$, для некоторого $p_2 \geq 0$

$$\sup_{\theta \in \Theta} (1 + |\theta|^{p_2})^{-1} I(\theta) < \infty;$$

6) π непрерывна на Θ^c ; имеет k непрерывных производных на Θ , $\pi > 0$ на Θ , $\pi = 0$ на дополнении Θ^c ;

7) $\sup_{\theta \in \Theta} (1 + |\theta|^{p_3})^{-1} \pi(\theta) < \infty$ для некоторого $p_3 \geq 0$;

8) $W \geq 0$ и выпукла;

9) для некоторых $a \geq 1$, $\varepsilon_2 > 0$ $W(\theta) = |\theta|^a$ при $|\theta| \leq \varepsilon_2$;

10) для некоторого $p_4 \geq 0$ $\sup_{\theta \in R^1} (1 + |\theta|^{p_4})^{-1} W(\theta) < \infty$.

Пусть $P_{\theta, k}$ — распределение $(l_1(x, \theta), \dots, l_k(x, \theta))$, порожденное $f(x, \theta)$.

(АС) Для всякого компакта $K \subset \Theta$ существует натуральное n_1 такое, что n_1 -кратная свертка $P_{\theta, k}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту с ограниченной плотностью равномерно на K .

(NL) Для всякого компакта $K \subset \Theta$, для всякого $C > 0$ $\sup_{\theta \in K} \sup_{\|t\| > C} |\psi_\theta(t)| < 1$,

где $\psi_\theta(t)$ — характеристическая функция $P_{\theta, k-1}$.

Введем обозначения: P_{θ_0} — вероятность, порожденная выборками, E_{θ_0} — математическое ожидание по P_{θ_0} , $E_{i_1, \dots, i_r}^{s_1, \dots, s_r} = E_{\theta_0} l_{i_1}^{s_1}(\cdot, \theta_0) \dots l_{i_r}^{s_r}(\cdot, \theta_0)$, $I = I(\theta_0)$, $l_{0i} = \partial^i \ln \pi(\theta_0) / \partial \theta^i$, Φ и φ соответственно функция и плотность стандартного нормального распределения.

Теорема 1. В условиях 1 — 7 для всякого целого m , $1 \leq m \leq m_0$, равномерно по θ_0 на компактах имеет место разложение

$$E_{\theta_0} (V_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0))^m = \sum_{\gamma=0}^{[(k-1-\varepsilon(m))/2]} H_{2\gamma+\varepsilon(m), m} n^{-\gamma+\frac{\varepsilon(m)}{2}} + o(n^{-(k-1)/2}),$$

где $\varepsilon(m) = m - 2[m/2]$, $H_{\beta, m}$ — полиномы от E_v^1 , $v = 3, \dots, \beta + 2$, от $1/I$, от l_{0v} , $v = 1, \dots, \beta$, и от $E_{1, \dots, \beta+1}^{s_1, \dots, s_{\beta+1}}$, $s_i \geq 0$, $s_1 + \dots + s_{\beta+1} \leq \min(\beta + 2, (\beta + m)/2 + 1)$. Если сверх того выполнены условия 8 — 10, то же верно для t_n . Коэффициенты в этом случае являются полиномами также и от a .

Теорема 2. 1) Пусть выполнены условия 1—7, (NL) при $k \geq 2$, $m_0 = 1$ с показателями степеней у моментов, замененными на $(k+1)/i + \alpha$ в 4b), на $1 + \alpha$ в 4c). Тогда равномерно по $\theta_0 \in K$, $z \in R^1$ (для всякого компакта $K \subset \Theta$) имеет место раз-

ложение

$$P_{\theta_0} \{ \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) < z / \sqrt{I} \} = \Phi(z) + \sum_{i=1}^{k-1} n^{-i/2} V_i(z) \varphi(z) + o(n^{-(k-1)/2}),$$

где $V_i(z)$ — полиномы от z степени $i+1$, коэффициенты которых зависят от $E_{1, \dots, i+2}^{s_1, \dots, s_{i+2}}$, $s_1 + \dots + (i+2)s_{i+2} \leq i+2$, и от l_{0j} , $j = 1, \dots, i$. 2) Если выполнены условия 1—10, (AC) при $k \geq 2$, $m_0 = 1$ и интегралы в 4b) сходятся равномерно на компактах, то же верно для t_n . Коэффициенты в этом случае зависят также и от a .

Теоремы 1 и 2 вытекают из теорем о разложениях нормированных отклонений $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, $\sqrt{n}(t_n - \theta_0)$, содержащихся в [4]. Доказательства теорем 1, 2, использующие некоторые идеи [1] — [3], и формулы, позволяющие вычислять коэффициенты разложений, готовятся к публикации.

Вычисления дают ($G_{\beta, m}$ — коэффициенты для t_n):

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= \frac{E_3^1 + 2E_{1,2}^{1,1}}{2I^2} + l_{0,1} \frac{1}{I}, \quad G_{1,1} = H_{1,1} + \frac{a+1}{6} \frac{E_3^1}{I^2}; \quad G_{0,2} = H_{0,2} = \frac{1}{I}, \\ H_{2,2} &= \frac{E_{1,3}^{3,1}}{I^4} + \frac{15}{4} \frac{(E_3^1)^2}{I^4} + 12 \frac{E_{1,2}^{1,1} \cdot E_3^1}{I^4} + 6 \frac{(E_{1,2}^{1,1})^2}{I^4} + 2 \frac{E_{1,2}^{2,1}}{I^3} + \frac{E_4^1}{I^3} + 3 \frac{E_{1,3}^{1,1}}{I^3} + \\ &\quad + 3 \frac{E_2^2}{I^3} + l_{0,1} \frac{3E_3^1 + 4E_{1,2}^{1,1}}{I^3} + (2l_{0,2} + l_{0,1}^2) \frac{1}{I^2} - \frac{1}{I}, \\ G_{2,2} &= H_{2,2} + \frac{a+1}{3} \left(\frac{a+31}{12} \frac{(E_3^1)^2}{I^4} + 3 \frac{E_{1,2}^{1,1} \cdot E_3^1}{I^4} + \frac{E_4^1}{I^3} + \frac{E_{1,3}^{1,1}}{I^3} + l_{0,1} \frac{E_3^1}{I^3} \right). \end{aligned}$$

Эти формулы, решающие, в частности, задачу Ю. В. Линника вычисления $H_{2,2}$, $G_{2,2}$, дают

$$\begin{aligned} n^2 (E_{\theta_0} (t_n - \theta_0)^2 - E_{\theta_0} (\hat{\theta}_n - \theta_0)^2) &= \frac{(a+1)(a-5)}{36} \frac{(E_3^1)^2}{I^4} + o(1), \\ n^2 (E_{\theta_0} (t_n - \theta_0)^2 - E_{\theta_0} (t_n - \theta_0)^2) &= \frac{(a-b)(a+b-4)}{36} \frac{(E_3^1)^2}{I^4} + o(1); \end{aligned}$$

где верхний индекс указывает на значение a в условии 9, в двух случаях: $f(x, \theta) = f(x - \theta)$, $\pi(\theta) = 1$, $\theta \in \Theta$, и $f(x, \theta) = f(x/\theta)/\theta$, $\pi(\theta) = 1/\theta^2$, $\theta \in \Theta \subset [\gamma, +\infty)$, $\gamma > 0$; мера Лебега.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Об асимптотическом поведении обобщенных байесовских оценок, ДАН СССР, 194, 2 (1970), 257—260.
- [2] Д. М. Чибисов, Асимптотическое разложение для распределения статистики, допускающей асимптотическое разложение, Теория вероят. и ее применен., XVII, 4 (1972), 658—668.
- [3] Д. М. Чибисов, Асимптотическое разложение для сумм специального вида с применением к оценкам минимального контраста, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 4 (1973), 689—702.
- [4] С. И. Гусев, Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае. I. Разложения случайных величин, Теория вероят. и ее примен., XX, 3 (1975), 488—514.

Заседание 8 апреля

Холево А. С., К общей теории статистических решений.

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, 218, 1 (1974), 54—57.

Заседание 6 мая

Орлов А. И., Оценки скорости сходимости распределений статистик интегрального типа, определенных с помощью эмпирических процессов.

Рассмотрим k независимых выборок из равномерного распределения на $[0, 1]$ объемов $n(1), n(2), \dots, n(k)$ соответственно. Пусть $F_{i, n(i)}(t)$, $i = 1, \dots, k$, $0 \leq t \leq 1$, — эмпирические функции распределения, построенные по этим выборкам, а $\xi_{i, n(i)}(t) = (n(i))^{1/2} (F_{i, n(i)}(t) - t)$ — соответствующие эмпирические процессы. Введем обозначения:

$$n = (n(1), n(2), \dots, n(k)), |n| = \min(n(1), n(2), \dots, n(k)),$$

$$\xi_n(t) = (\xi_{1, n(1)}(t), \xi_{2, n(2)}(t), \dots, \xi_{k, n(k)}(t)).$$

Рассмотрим функцию $f(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}, y_{2k+1})$ переменных $y_1, \dots, y_{2k+1}$, $|y_i| < \infty$, $i = 1, \dots, 2k$, $0 \leq y_{2k+1} \leq 1$. Будем использовать обозначение $f(\xi_n(t), \xi_n(1-t), t) = f(\xi_{1, n(1)}(t), \dots, \xi_{k, n(k)}(t), \xi_{1, n(1)}(1-t), \dots, \xi_{k, n(k)}(1-t), t)$.

Пусть $F_n(t) \rightarrow t$ при $|n| \rightarrow \infty$ по вероятности при любом t , $0 \leq t \leq 1$. Будем изучать статистики

$$\eta_n = \int_0^1 f(\xi_n(t), \xi_n(1-t), t) dF_{(n)}(t).$$

Статистики вида η_n являются частным случаем статистик интегрального типа, введенных в [1].

Пусть $\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)$ — независимые гауссовские процессы на $[0, 1]$ с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными функциями $\min(t, s) - st$, совпадающими с ковариационной функцией эмпирического процесса. Положим

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t)),$$

$$\eta = \int_0^1 f(\xi(t), \xi(1-t), t) dt,$$

$$\Delta_n = \sup_{-\infty < z < \infty} |P\{\eta_n < z\} - P\{\eta < z\}|.$$

При выполнении некоторых весьма слабых условий $\Delta_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$ (см., например, [1]). При выполнении более жестких условий можно оценить скорость сходимости Δ_n . Введем обозначения

$$v_n = \int_0^1 f(\xi_n(t), \xi_n(1-t), t) dt, \quad g_n(t) = |n|^{1/2} (F_{(n)}(t) - t).$$

Теорема. I. Пусть при каждом n интегралы в η_n и v_n являются пределами интегральных сумм с вероятностью единица; для любого натурального r функции

$$G_r(t_1, \dots, t_{2r}, s_1, \dots, s_{2r}) = M \prod_{1 \leq i \leq 2r} f(\xi_n(t_i), \xi_n(1-t_i), t_i) g_n(s_i)$$

дифференцируемы $2r$ раз по переменным $s_1, \dots, s_{2r}$ в каждой замкнутой области, где не меняется упорядоченность $4r$ переменных t_i, s_i , $i = 1, \dots, 2r$, отношением $\geq$, при-

чем существуют константы $D_1(r)$ такие, что при всех n

$$\max_{s \leq 2r} \sup_{\substack{0 \leq t_i, s_i \leq 1 \\ i=1, \dots, 2r}} \sum_{\substack{\beta(i) \geq 0 \\ \beta(1) + \dots + \beta(2r) = s}} \left| \frac{\partial^s G_n(t_1, \dots, t_{2r}, s_1, \dots, s_{2r})}{\partial s_1^{\beta(1)} \dots \partial s_{2r}^{\beta(2r)}} \right| \leq D_1(r).$$

II. Пусть при любом натуральном r и любом n функции

$$H_n(t_1, \dots, t_{2r}) = M \prod_{1 \leq i \leq 2r} f(\xi_n(t_i), \xi_n(1-t_i), t_i),$$

$$H_\infty(t_1, \dots, t_{2r}) = M \prod_{1 \leq i \leq 2r} f(\xi(t_i), \xi(1-t_i), t_i)$$

дифференцируемы $2r$ раз в любой области, задаваемой произвольным фиксированным упорядочением переменных $t_1, \dots, t_{2r}$ с помощью отношения $\geq$, причем существуют константы $D_2(r)$ такие, что при всех $n \leq \infty$

$$\max_{s \leq 2r} \sup_{\substack{0 \leq t_i \leq 1 \\ i=1, \dots, 2r}} \sum_{\substack{\alpha(i) \geq 0 \\ \alpha(1) + \dots + \alpha(2r) = s}} \left| \frac{\partial^s H_n(t_1, \dots, t_{2r})}{\partial t_1^{\alpha(1)} \dots \partial t_{2r}^{\alpha(2r)}} \right| \leq D_2(r).$$

III. Пусть существуют константы β и A такие, что

$$\sup_{(-\infty, \infty)^{2k} \times [0,1]} \left(\max_{1 \leq j \leq 2k} |y_j| \right)^\beta \sum_{j=1}^{2k} \left| \frac{\partial f(y_1, \dots, y_{2k+1})}{\partial y_j} \right| \leq A.$$

IV. Пусть предельная функция распределения удовлетворяет условию Липшица на прямой, т. е. существует константа B такая, что

$$\sup_{z, \Delta} \Delta^{-1} |P\{\eta < z + \Delta\} - P\{\eta < z\}| \leq B.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа C такая, что при всех n

$$\Delta_n \leq C |n|^{-1/2+\varepsilon},$$

причем C зависит лишь от констант ε, β, A, B и последовательностей $D_1 = (D_1(1), D_1(2), D_1(3), \dots)$ и $D_2 = (D_2(1), D_2(2), D_2(3), \dots)$.

Рассмотрим важный частный случай, к которому относятся обычно используемые статистики.

Следствие. Пусть

$$f(y_1, \dots, y_{2k}, y_{2k+1}) = f_1(y_1, \dots, y_{2k})h(y_{2k+1}),$$

где $f_1(y_1, \dots, y_{2k})$ — многочлен степени p от переменных $y_1, \dots, y_{2k}$, коэффициенты которого не превосходят Q по модулю, функция $h(y_{2k+1})$ сколько угодно раз дифференцируема на замкнутом отрезке $[0, 1]$,

$$h_r = \sup_{0 \leq t \leq 1} |h^{(r)}(t)|, \quad h = (h_0, h_1, h_2, \dots).$$

Пусть при всех n

$$g_n(t) = \sum_{1 \leq i \leq k} (a_1(i, n) \xi_{i, n(i)}(t) + a_2(i, n) \xi_{i, n(i)}(1-t)),$$

причем

$$\sum_{i=1}^k (|a_1(i, n)| + |a_2(i, n)|) \leq 1.$$

Пусть выполнено условие IV основной теоремы. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует

константа C , зависящая только от ε , p , Q , B , h и такая, что при всех n

$$\Delta_n < C |n|^{-1/2+\varepsilon}.$$

Пример 1. Рассмотрим статистику интегрального типа

$$\eta_n^1 = \int_0^1 t \xi_{1, n(1)}(t) dt, \quad \eta_n^2 = \int_0^1 \xi_{1, n(1)}^2(t) dt.$$

и оценку скорости сходимости: для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что при всех n

$$\Delta_n < C(\varepsilon) |n|^{-a+\varepsilon}.$$

Для η_n^1 эта оценка верна при $a = 1/2$ и неверна при $a > 1/2$. Для η_n^2 эта оценка верна при $a = 1$. Таким образом, оценку, полученную в основной теореме, нельзя улучшить одновременно для всех элементов достаточно широкого класса статистик интегрального типа, хотя вопрос о скорости сходимости отдельных статистик интегрального типа остается открытым.

Пример 2. Рассмотрим статистику типа омега-квадрат

$$\eta_n = \sum_{1 \leq i \leq k} \int_0^1 h_i(t) \xi_{i, n(i)}^2(t) dt.$$

Пусть функции $h_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, сколько угодно раз дифференцируемы на $[0, 1]$. Тогда эта статистика удовлетворяет условиям следствия из основной теоремы.

Доказательство основной теоремы проводится методом, в простейшем случае изложенным в [2]. Библиография приведена в [2]. Полное доказательство всех сформулированных в докладе утверждений содержится в [3]. Некоторые дальнейшие результаты опубликованы в [2], [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. И. Орлов, Асимптотическое поведение статистик интегрального типа, ДАН СССР, 219, 4 (1974), 808—811.
- [2] А. И. Орлов, Скорость сходимости распределения статистики Мизеса — Смирнова, Теория вероят. и ее примен., XIX, 4 (1974), 766—786.
- [3] А. И. Орлов, Оценки скорости сходимости распределений статистик интегрального типа, Канд. дисс., М., 1975.
- [4] А. И. Орлов, Переход от сумм к интегралам и его применения в изучении асимптотических распределений статистик, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 4 (1973), 881—883.
- [5] А. И. Орлов, Применение критериев типа омега-квадрат для проверки принадлежности функции распределения выборки некоторому семейству; в сб.: «Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях», М., «Наука», 1974, 401—403.